اذا كانت الغاية تقترب من (∞) والدالة تكون بصيغة
(رقم او متغير $\mp$ $\sqrt{\text{دالة}}$) او بالعكس فاننا نضرب
بالعامل المرافق.

Ex. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+x} \right)$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2+x} \right) * \frac{x + \sqrt{x^2+x}}{x + \sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2+x)}{x + \sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - x}{x + \sqrt{x^2+x}} = \frac{-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}}$$

$$= \frac{-1}{1 + \sqrt{1+}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

متطابقات الربع الأول

1- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

2- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

4- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

5. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

6. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$

متطابقات الربع الثاني

1. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

2. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

3. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

4. $\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

5. $\sec(\pi - \theta) = -\sec\theta$

6. $\csc(\pi - \theta) = \csc\theta$

متطابقات الربع الثالث

1) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

2) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

3) $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$

4) $\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$

5) $\sec(\pi + \theta) = -\sec\theta$

6) $\csc(\pi + \theta) = -\csc\theta$

متطابقات الربع الثاني

1) $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$

2) $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

3) $\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$

4) $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$

5) $\sec(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\csc\theta$

6) $\csc(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sec\theta$

المتطابقات

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2) $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

3) $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

4) $\cos 2X = \begin{cases} \cos^2 X - \sin^2 X \\ 2\cos^2 X - 1 \\ 1 - 2\sin^2 X \end{cases}$

5) $\sin 2X = 2 \sin X \cdot \cos X$

6) $\sin^2 X = \frac{1}{2}(1 - \cos 2X)$

7) $\cos^2 X = \frac{1}{2}(1 + \cos 2X)$

EX. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\tan 2y}{3y}$

$\frac{1}{3} \lim\limits_{y \to 0} \frac{\tan 2y}{y} * \frac{2}{2}$

$= \frac{2}{3} \lim\limits_{y \to 0} \frac{\tan 2y}{2y}$

$= \frac{2}{3} * 1 = \frac{2}{3}$

EX. ________ $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x^2 + x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x(2x+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x+1}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x+1}$

$= 2 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2x+1}$

$= 2 * 1 * \frac{1}{0+1} = 2$

عند وجود احدى الصيغ التالية

او اي صيغة اخرى مشابهة $\frac{\pi}{2} \mp x$, $\pi \mp x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{\pi}{x}$)

فاننا نحل السؤال بطريقة الفرضية حيث نفرض الصيغة

$(y =)$

EX. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Let $y = x - \frac{\pi}{2}$ if $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$

$x = y + \frac{\pi}{2}$

$\therefore \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + y) - \cos(\frac{\pi}{2} + y)}{y}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + y)}{y} - \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} + y)}{y}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\cos y}{y} \overset{+}{-} \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-\sin y}{y}$

$= 1 + 1 = 2$

EX. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$

Let $x - 1 = y$ when $x = 1$ $y = 0$

$x = y + 1$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin \pi (y+1)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(\pi + \pi y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\sin \pi y}{y} * \frac{\pi}{\pi}$$

$$= -\pi \lim_{y \to 0} \frac{\sin \pi y}{\pi y} = -\pi * 1 = -\pi$$

عندما تكون الزاوية هي $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ في الصيغ السابقة

فاننا نطبق احدى القوانين التالية

1- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

2- $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

Ex. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

let $y = x - \frac{\pi}{4}$, when $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 0$

$\therefore \quad x = y + \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + y\right) - 1}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan y}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan y} - 1}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{1 + \tan y}{1 - \tan y} - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\dfrac{1 + \tan y - 1 + \tan y}{1 - \tan y}}{y}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\frac{2 \tan y}{1 - \tan y}}{y}$$

$$= 2 \lim_{y \to 0} \frac{\tan y}{y} \cdot \lim_{y \to 0} \frac{+1}{1 - \tan y}$$

$$= 2 * 1 * \frac{+1}{1 - 0} = +2$$

Ex. Find $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x \sin \frac{1}{x}}{1 + x \cos \frac{1}{x}}$

Let $\frac{1}{x} = y$ when $x = 0 \Rightarrow y = \infty$

$$x = \frac{1}{y}$$

$$= \lim_{y \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{y} \sin y}{1 + \frac{1}{y} \cos y}$$

$$= \frac{1 + \lim_{y \to \infty} \frac{\sin y}{y}}{1 + \lim_{y \to \infty} \frac{\cos y}{y}} =$$

$$= \frac{1 + 0}{1 + 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Hopital's Rule

شروطها

١. لا تستخدم هذه الطريقة الا عندما يطلب استخدامها

٢. تتضمن هذه الطريقة اشتقاق البسط والمقام

كل على حده.

Ex. Find $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - x}{x}$ by Hopitals Rule

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin 2x * 2 - 1}{1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin 2x - 1}{1} = -2 * 0 - 1 = -1$$