

Methods of integration

1) completing the square

طريقة اكمال المربع

استخدم هذه الطريقة عند وجود معادلة تربيعية ولا تقل بالتجربة.

طريقة اكمال المربع تنقل الى صيغة (x) ونفصله على

(2) من الناتج نربعه ثم نضيفه ونفصله

Ex. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

$$= \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2 + 1 - 1} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 2 - 1}$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$$

$$\text{let } x+1 = u \Rightarrow dx = du$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x+1) + c$$

$$\text{Ex. } \int \frac{(x-4)dx}{x^2-6x+10}$$

$$= \int \frac{(x-4)dx}{x^2-6x+10+9-9} = \int \frac{(x-4)dx}{(x^2-6x+9)+10-9}$$

$$= \int \frac{(x-4)dx}{(x-3)^2+1}$$

$$\text{let } x-3=u, \quad dx=du$$

$$x=u+3$$

$$= \int \frac{u+3-4 du}{u^2+1} = \int \frac{u-1}{u^2+1} du$$

$$= \int \frac{u}{u^2+1} du - \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \int \frac{u}{u^2+1} du \times \frac{2}{2} - \tan^{-1} u$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^2+1)^{-1} 2u du - \tan^{-1} u$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2+1) - \tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln[(x-3)^2+1] - \tan^{-1}(x-3) + c$$

2) Reducing an improper Fraction

طريقة، لقمة، المقول

١- تستخدم هذه الطريقة عندما يكون، لدالة كسرية ودرجة

البسط، أكبر أو تساوي درجة، المقام

٢- نتوقف عن، لقمة عندما يكون، لمتبقى عدد ثابت

او متغير يحدد أس اقل من أس، المقوم عليه

٣- في نهاية، لقمة نطبق، لقانون، التالي

$$\frac{\text{المتبقى}}{\text{المقوم عليه}} + (\text{الناحية})$$

$$\text{Ex.} \int \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 x+2 \\
 x^2+1 \overline{) x^3+2x^2+1} \\
 \underline{-x^3+x} \\
 2x^2-x+1 \\
 \underline{-2x^2+2} \\
 -x-1
 \end{array} \\
 = \int (x+2) - \frac{(x+1)}{x^2+1} dx
 \end{array}$$

$$= \int (x+2) dx - \left[\int \frac{x}{x^2+1} dx \cdot \frac{2}{2} + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right]$$

$$= \int x dx + 2 \int dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)} dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 2x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x + c$$

Ex $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

$$\begin{array}{r} 1 \\ x^2+1 \overline{) x^2} \\ \underline{+x^2+1} \\ -1 \end{array}$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= x - \tan^{-1} x + c$$

Ex. $\int_0^3 \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x-3} dx$

$$= \int_0^3 (x^2 - 4) + \frac{0}{x-3} dx$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4 \\ x-3 \overline{) x^3 - 3x^2 - 4x + 12} \\ \underline{\cancel{x^3} - \cancel{3x^2}} \\ -4x + 12 \\ \underline{+4x + 12} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 4) dx$$

$$= \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 4 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_0^3$$

$$= \left[\frac{27}{3} - 4 \times 3 \right] - 0 = 9 - 12 = -3$$

التكامل بالتجزئة 3) integration by parts

١- نستخدم هذه الطريقة عندما توجد دالتان مضمومتان

ولا تمثل احدهما مشتقة، لاخرى

$$\int f(x)g(x)dx \quad \text{بالصيغة التالية}$$

٢- نفرض احدهما u ، ولاخرى dv ، وي لاي

$$\text{Let } f(x) = u, \quad g(x) = dv$$

وبعدنا نشتق (u) فنحصل على du

ونحاصل (dv) فنحصل على v

٣- نطبق القانون

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{EX. } \int x \cos x dx$$

$$\text{Let } u = x, \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int u dv = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

$$\text{Ex. } \int x^2 e^x dx$$

$$\text{let } u = x^2, \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x \cdot x^2 - \int 2x e^x dx$$

$$= e^x \cdot x^2 - 2 \int x e^x dx$$

$$\text{let } u = x, \quad dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right]$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x e^x - 2 \int e^x dx$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x e^x - 2 e^x + C$$

$$\text{Ex. } \int e^x \cos x dx$$

$$\text{let } u = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \sin x$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\text{let } u = e^x$$

$$du = e^x dx$$

$$dv = \sin x dx$$

$$v = -\cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - [e^x (-\cos x) - \int -\cos x e^x \, dx]$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} [e^x \sin x + e^x \cos x] + C$$

ex. $\int \cos(\ln x) \, dx$

Let $u = \cos(\ln x)$

$$du = -\sin(\ln x) \times \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx$$

$$v = x$$

$$\int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) - \int x (-\sin \ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx$$

Let $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$
 $du = \cos(\ln x) \times \frac{1}{x} \, dx$, $v = x$

$$= x \cos(\ln x) + [x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} \, dx]$$

$$x \cos \ln x + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx$$

$$\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} [x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)]$$

$$\text{Ex. } \int \sin \sqrt{x-1} dx$$

$$\text{Let } y = \sqrt{x-1}, \quad dy = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} dx$$

$$dx = 2\sqrt{x-1} dy$$

$$dx = 2y dy$$

$$\int \sin \sqrt{x-1} dx = 2 \int \sin y \cdot y dy$$

$$\text{Let } u = y, \quad \sin y dy = dv$$

$$du = dy$$

$$-\cos y = v$$

$$= 2[-y \cos y - \int -\cos y dy]$$

$$= 2[-y \cos y + \sin y] = -2y \cos y + 2 \sin y + c$$

$$= -2\sqrt{x-1} \cos \sqrt{x-1} + 2 \sin \sqrt{x-1} + c$$

4) Tabular integration اتحاد بالجدول

× تستخدم هذه الطريقة عندما توجد دالتان ضرورتان أحدهما قابلة للتكامل والاخرى قابلة للاشتقاق الى الصفر.

EX. $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$

derivation	integral
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = \left[x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x \right]_0^1$$

$$= \left[(1)^2 \cdot e^1 - 2 \cdot (1) \cdot e^1 + 2e^1 \right] - \left[0e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2e^0 \right]$$

$$= e - 2$$

EX. $\int x^3 \cdot \sin x dx$

derivation integrals

$$\int x^3 \cdot \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

x^3	$\sin x$
$3x^2$	$-\cos x$
$6x$	$-\sin x$
6	$\cos x$
0	$\sin x$