odd and even powers of sine and cosine

* في حالة اعطاء (sin) او (cos) مرفوع الى أس زوجي او فردي فاننا نتبع التالي.

1. اذا كان أس (sin) او (cos) فردي فاننا نطبق العلاقة التالية,

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{او} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Ex. $\int \cos^5 5x \, dx$

sol $\int (\cos^2 5x)^2 \cdot \cos 5x \, dx = \int (1 - \sin^2 5x)^2 \cos 5x \, dx$

$$= \int (1 - 2\sin^2 5x + \sin^4 5x) \cos 5x \, dx$$

$$= \int \cos 5x \, dx - 2\int \sin^2 5x \cos 5x \, dx + \int \sin^4 5x \cos 5x \, dx$$

$$= \int \cos 5x \, dx * \frac{5}{5} - 2\int \sin^2 5x \cos 5x \, dx * \frac{5}{5} + \int \sin^4 5x \cos 5x \, dx * \frac{5}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{5} * \frac{1}{3}\sin^3 5x + \frac{1}{5} * \frac{1}{5} * \sin^5 5x + c$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{2}{15}\sin^3 5x + \frac{1}{25}\sin^5 5x + c$$

Ex. $\int \sin^3 x \, dx$

$$\int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx \quad * \frac{-1}{-1}$$

$$= \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x \, (-\sin x) \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

2. اذا كان أس (sin) او (cos) زوجي فاننا نضعف قانون ضعف الزاوية

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Ex. $\int \cos^2 2\theta \, d\theta$

$$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 4\theta \, d\theta \quad * \frac{4}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} \sin 4\theta + c$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta + c$$

5) produce of sines and cosines

* في حالة وجود (sin) و (cos) مضروبان مع بعضهما وكلاهما مرفوع الى اسس وكالتالي

$$\int \sin^{m}x \cdot \cos^{n}x \, dx$$

هناك ثلاث حالات للحل

a) اذا كان (m) عدد فردي و (n) عدد زوجي فاننا نطبق العلاقة

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Ex.

$$\int \sin^{5}x \cdot \cos^{2}x \, dx$$

$$\int \sin^{4}x \cdot \sin x \cdot \cos^{2}x \, dx$$

$$\int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \sin x \cdot \cos^2 x * \frac{-1}{-1} dx - 2\int \sin x \cos^4 x * \frac{-1}{-1} dx$$

$$+ \int \sin x \cos^6 x * \frac{-1}{-1} dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

b) اذا كان (m) عدد زوجي و (n) عدد فردي فاننا نطبق القانون التالي

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Ex. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$

$$\int \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

ج اذا كان (m) و (n) كلاهما زوجي فاننا نطبق القانون

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Ex. $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) * \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \int \cos^2 2x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\, dx\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 4x * \frac{4}{4} dx\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int dx - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x \, dx\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

* اذا اعطا (sin) او (cos) مضروبان وزواياهما مختلفة فاننا نطبق القوانين التالية.

a) $\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]$

b) $\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$

c) $\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$

Ex. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$.

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(3-5)x + \sin(3+5)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(-2)x + \sin 8x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[-\sin 2x * \frac{2}{2}dx + \int \sin 8x * \frac{8}{8}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\int \underline{\sin 2x} * 2\,dx + \frac{1}{16}\int \sin 8x * 8\,dx$$

$$= \frac{-1}{4} * (-\cos 2x) + \frac{1}{16} * (-\cos 8x) + c$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + c$$

Ex. $\int \cos x \cdot \cos 7x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(1-7)x + \cos(1+7)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\cos(-6)x + \cos 8x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 6x \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 6x * \frac{6}{6} \, dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x * \frac{8}{8} \, dx$$

$$= \frac{1}{12}\int \cos 6x * 6 \, dx + \frac{1}{16}\int \cos 8x * 8 \, dx$$

$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 8x + c$$

Ex. $\int \sin 3x \cdot \sin 2x \, dx$

$= \frac{1}{2} \int [\cos(3-2)x - \cos(3+2)x] \, dx$

$= \frac{1}{2} \int [\cos x - \cos 5x] \, dx$

$= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x \, dx \quad * \frac{5}{5}$

$= \frac{1}{2} \int \cos x \, dx - \frac{1}{10} \int \cos 5x * 5 \, dx$

$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$

6) Trigonometric substitution

التعويضات المثلثية.

تستخدم هذه الطريقة عند مشاهدة الصيغ التالية:

1) a^2+u^2 , $\sqrt{a^2+u^2}$

2) a^2-u^2 , $\sqrt{a^2-u^2}$

3) u^2-a^2 , $\sqrt{u^2-a^2}$

1) a^2+u^2, $\sqrt{a^2+u^2}$

في هذه الصيغة نتبع الخطوات التالية:

Let $u = a\tan\theta$, $\tan\theta = \frac{u}{a}$

$$du = a\sec^2\theta\, d\theta$$

ونعوض الدالة المفروضة والمشتقة في السؤال الاصلي