Ex. $\int \frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}}$

$25 = a^2 \implies a = 5$

$(3y)^2 = u^2$

let $3y = a\tan\theta$

$\therefore y = \frac{a}{3}\tan\theta = \frac{5}{3}\tan\theta \implies \tan\theta = \frac{3y}{5}$

$\therefore \frac{dy}{} = \frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta$

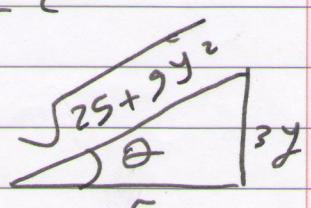
$$= \int \frac{\frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{25+(3*\frac{5}{3}\tan\theta)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{25+25\tan^2\theta}} = \int \frac{\frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{25(1+\tan^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{5\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\left[\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c\right]$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{25+9y^2}}{5} + \frac{3y}{5}\right| + c$$



2) a^2-u^2 أو $\sqrt{a^2-u^2}$

في هذه الصيغة نتبع ما يلي:

Let $u = a\sin\theta$, $\sin\theta = \frac{u}{a}$

$du = a\cos\theta\, d\theta$

ثم نعوض الدالة المفروضة في الدالة الرئيسية.

Ex. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\, dx$

Let $x = a\sin\theta$, $a=1$, $x=u$

$\therefore x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\, d\theta$

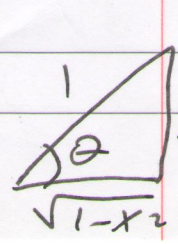
$$\int \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\, d\theta = \int \frac{\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta = \int \frac{(1-\sin^2\theta)}{\sin\theta} d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sin\theta} d\theta - \int \sin\theta\, d\theta = \int \csc\theta\, d\theta - \int \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\ln|\csc\theta + \cot\theta| + \cos\theta + c$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + \sqrt{1-x^2} + c$$



3) $u^2 - a^2$ ، $\sqrt{u^2 - a^2}$

في هذه الصيغة نتبع ما يلي:

Let $u = a\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{u}{a}$

$du = a\sec\theta \cdot \tan\theta \, d\theta$

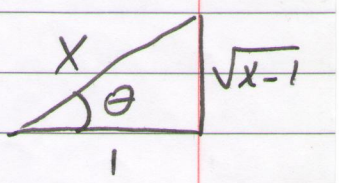
ثم نعوض الدالة المفروضة في الدالة الأصلية.

Ex. $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

$\therefore a = 1$

Let $x = a\sec\theta \Rightarrow x = \sec\theta$, $\sec\theta = \frac{x}{1}$

$dx = \sec\theta\tan\theta \, d\theta$



$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta \, d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\sec\theta \cdot \tan\theta \, d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\tan^2\theta}} = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\tan\theta}{\sec\theta\tan\theta} d\theta$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sec\theta} d\theta = \int_{\sqrt{2}}^{2} \cos\theta \, d\theta = \sin\theta \Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \Big|_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4-1}}{2} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7) Integration involving ax^2+bx+c

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون (x^2) ضمن معادلة تربيعية ومضروبة في عدد معين (عدا 1، الصفر) وطريقة الحل كالآتي

$$\int \frac{dx}{6x^2-4x+2}$$

$$\int \frac{dx}{6x^2-4x+2} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-\frac{4}{6}x+\frac{2}{6}}$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}} \quad =a^2$$

$$(x-\tfrac{1}{3})^2 = u^2$$

$$\frac{2}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3} = a^2 \quad \therefore \quad a = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

let $x - \frac{1}{3} = a\tan\theta$

$\therefore x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\tan\theta$

$$\tan\theta = \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{3(x - \frac{1}{3})}{\sqrt{2}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{2}}$$

$$dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

بالتعويض:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{(\frac{\sqrt{2}}{3}\tan\theta)^2 + \frac{2}{9}}$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{\sqrt{2}}{3}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{2}{9}\tan^2\theta + \frac{2}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{18}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{2}{9}(\tan^2\theta + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{18}\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{2}{9}\sec^2\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{18} * \frac{9}{2}\int d\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}\theta + c$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{3x-1}{\sqrt{2}} + c$$

8) Rational Functions and partial Fraction

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة كسرية ودرجة البسط اقل من درجة المقام. وعندما يكون المقام معادلة تربيعية تحلل الى قوسين بطريقة التجربة واذا لم تحلل نحلها باكمال المربع كما سبق.

$$\int \frac{5X-7}{x^2-3X+2}\,dx = \frac{A}{}$$

$$\int \frac{5X-7}{x^2-3X+2}\,dx = \int \frac{5X-7}{(X-2)(X-1)}\,dx$$

$$= \frac{A}{(X-2)} + \frac{B}{(X-1)}$$

$$= \frac{A(X-1)+B(X-2)}{(X-2)(X-1)} = \frac{AX-A+BX-2B}{(X-2)(X-1)}$$

$$= \frac{X(A+B)-A-2B}{(X-2)(X-1)}$$

∴ بسط الدالة المفروضة = بسط الدالة X الصحيح

$$(A+B)X - A - 2B = 5X - 7$$

$$A + B = 5 \quad \text{—— (1)}$$

$$-A - 2B = -7 \quad \text{—— (2)}$$

وبحل المعادلتين آنياً نجد أن

$$B = 2$$
$$A = 3$$

$$\therefore \frac{3}{X-2} + \frac{2}{X-1} = \int \frac{3}{X-2}\,dX + \int \frac{2}{X-1}\,dX$$

$$= 3\ln(X-2) + 2\ln(X-1) + C$$

Ex $$\int \frac{X^2}{(X-1)(X+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{A}{(X-1)} + \frac{B}{(X+1)} + \frac{C}{(X+1)^2}$$

الاستمارية The continuity

خطوات حل الاستمارية:

١. نستخرج قيمة الدالة عند القيمة المعطاة لـ (x)

٢. نجد غاية الدالة عند نفس القيمة.

٣. اذا كانت الدالة تساوي الغاية فان الدالة مستمرة
اما اذا كانت الدالة لا تساوي الغاية فان الدالة
غير مستمرة.

٤. اذا كانت الدالة تمتلك (> او <) عند نفس القيمة
فانها تمتلك غاية لليمين ولليسار فاذا كانت غايتها
لليمين = غايتها لليسار فهذا لا يعود استمارية
الدالة بعد ذلك نقارنها مع قيمة الدالة فاذا كانت
تساويها فان الدالة مستمرة واذا لم تساويها فان
الدالة غير مستمرة

Ex. if $F(x) = x^2 - 4$ is the function continuty at $x = 3$

1) $F(x) = x^2 - 4$

$F(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

2) $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = 3^2 - 4 = 5$

$\therefore F(3) = \lim_{x \to 3} F(x)$

$\therefore$ the Function is continuty at $x = 3$

Ex. Is the Function $F(x) = \frac{1}{x-2}$. continuos at $x = 2$

1) $F(x) = \frac{1}{x-2}$

$F(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \infty$

2) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} = \infty$

$\therefore F(2) \neq \lim_{x \to 2} F(2)$

$\therefore$ the Function is not continuos at $x = 2$

Ex. If $F(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$, is the Function continuos at $x = 3$

1) $F(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

$F(3) = \frac{3^3 - 27}{3 - 3} = \frac{0}{0} = 0$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$

$\lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9) = 9 + 9 + 9 = 27$

$F(3) \neq \lim_{x \to 3} F(x)$

∴ the Function discontinuos at $x = 3$