$x^2 - y^2 x - (1 + 2y^2) = 0$

$x = \dfrac{+y^2 \mp \sqrt{y^4 + 4(1 + 2y^2)}}{2}$

$y^4 + 8y^2 + 4 \geq 0 \qquad = \text{Real}$

$R_f = [0, \infty) \qquad \text{o}R \quad y \geq 0$

EX.

$y = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$

$\sqrt{x} \geq 0$

$x \geq 0$

$\sqrt{x+1} \geq 0$

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$ وهذا غير ممكن

$D_f = R / [0, \infty)$

$$y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$y^2 = \frac{x}{x+1}$$

$$y^2x + y^2 = x$$

$$y^2x - x = -y^2$$

$$x(y^2 - 1) = -y^2$$

$$x = \frac{-y^2}{y^2 - 1}$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = \mp 1$$

$$R_f = y \geq 0, \quad y \neq 1$$

definite integration

التكامل المحدد.

في هذا النوع من التكامل نضيف فقط حدود التكامل

ونطبق نفس القواعد الخاصة بالتكامل غير المحدد

ونلغي ثابت التكامل c

Ex. $\int_0^3 x \cdot 3^{x^2} \, dx.$

$$\int_0^3 x \, 3^{x^2} \, dx. * \frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 3^{x^2} \, 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} * \left. \frac{3^{x^2}}{\ln 3} \right|_0^3$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}\left[3^{(3)^2} - 3^0\right] = \frac{1}{2\ln 3}\left[3^9 - 1\right]$$

Ex $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\sqrt{x} * \frac{1}{\sqrt{x}} * dx * \frac{2}{2}$

$= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\sqrt{x} * \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$= 2 * -\cos\sqrt{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2\cos\sqrt{x} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= -2\cos\sqrt{\pi} - (-2\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}})$

$= -2\cos\sqrt{\pi} + 2\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Ex. $\int_0^1 \frac{dx}{\cosh 4x - \sinh 4x}$

$\int_0^1 \frac{dx}{e^{-4x}} = \int_0^1 e^{4x} dx * \frac{4}{4}$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 e^{4x} * 4\, dx = \frac{1}{4} e^{4x} \Big|_0^1$

$= \frac{1}{4}[e^4 - e^0] = \frac{1}{4}[e^4 - 1]$

$$\text{Ex} \int_1^2 \sqrt{(z^2 - z^{-2})^2 + 4} \; dz$$

$$\int_1^2 \sqrt{z^4 - 2z^2 z^{-2} + z^{-4} + 4} \; dz$$

$$= \int_1^2 \sqrt{z^4 - 2 + z^{-4} + 4} \; dz$$

$$= \int_1^2 \sqrt{z^4 + 2 + z^{-4}} \; dz$$

$$= \int_1^2 \sqrt{(z^2 + z^{-2})^2} \; dz = \int_1^2 (z^2 + z^{-2}) \, dz$$

$$= \int_1^2 z^2 \, dz + \int_1^2 z^{-2} \, dz$$

$$= \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{z} \Big|_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{3}(2^3) - \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{1}{3} z^1 - \frac{1}{1} \right]$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{17}{6}$$

Ex. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \csc\theta \, d\theta = -\ln|\csc\theta + \cot\theta| \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}}\right| - (-\ln)\left|\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= -\ln\left|\frac{1}{(-1)} + 0\right| + \ln\left|\frac{1}{1} + 0\right|$$

$$= -\ln|-1| + \ln|1|$$

$$= -\ln 1 + \ln 1 = 0$$

Definite Integration

التكامل المحدد

في هذا النوع من التكامل نضيف حدود التكامل و نطبق
نفس قواعد الخاصه بالتكامل غير المحدد ونلغي ثابت
التكامل C

Ex. $\int_0^3 x \cdot 3^{3x^2} \cdot dx$

$$\int_0^3 x \cdot 3^{x^2} \cdot dx \cdot \frac{2}{2}$$

① نلاحظ تكامل عدد مرفوع لأس هو نفس المقدار مع توفير مشتقة الاس

$\frac{\text{هو نفس المقدار}}{\ln \text{العدد}}$

$$\frac{1}{2}\int_0^3 2x \cdot 3^{x^2} \cdot dx$$

تكامل ثم تضيفا الحدود بدل كل (X)

$$\frac{1}{2} * \left.\frac{3^{x^2}}{\ln 3}\right|_0^3 = \frac{1}{2\ln 3}\left[3^{(3)^2} - 3^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{2\ln 3}\left[3^{9} - 1\right]$$

Ex $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx * \left(\frac{2}{2}\right)$$

توفير مشتقة الدالة المثلثية ثم تكامل

$$= -2\cos\sqrt{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2\cos\sqrt{\pi} - \left(-2\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\right)$$

$$= -2\cos\sqrt{\pi} + 2\cos\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_1^2 \sqrt{(z^2-\bar{z}^2)^2+4}\;.dz$$ H.w

Exa. $\int_0^1 e^x . dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

Exa. $\int_0^\pi \cos 3x . \cos 4x . dx$

$= \frac{1}{2}\int\left[\cos(-x).dx + \cos(7x)\right]$

$= \frac{1}{2}\int\left[\cos(-x).dx + \frac{1}{7}\cos(7x).dx.7\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\sin x + \frac{1}{7}\sin(7x)\right]_0^\pi$

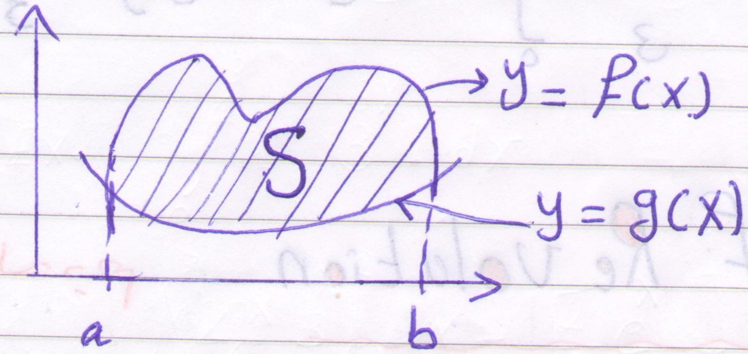
$\frac{1}{2}\left(\sin(180) + \frac{1}{7}\sin(7.180)\right) - \sin(0)$

$= \frac{1}{2}(0-0) = 0$

Application of Integration

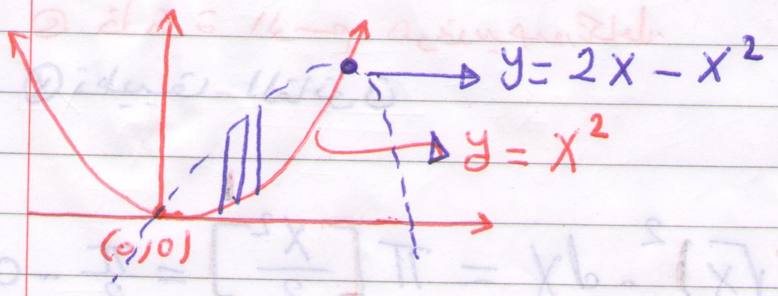
أحدى تطبيقات التكامل
المحدد هي أيجاد مساحة
والحجم

Areas between Curves



$$\boxed{A = \int_a^b f(x) \cdot dx - \int_a^b g(x) \cdot dx} \Rightarrow$$ قانون المساحة

Exa → Find the Area of region bounded by Parabolas $y = x^2$ and $y = 2x - x^2$



$$A = \int_0^1 f(x) - g(x) \cdot dx$$

$$A = \int_0^1 (2x - x^2) - x^2 \cdot dx$$

$$\int_0^1 2x - 2x^2 \cdot dx \Rightarrow 2\int_0^1 (x - x^2) \cdot dx$$

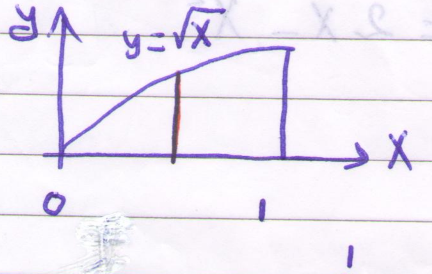
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

Volume of Revolution

أيجاد الحجم

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 \cdot dx}$$ ⇒ قانون الحجم

Exa. Find the volume of soild obtained by Rotating about X-axises of region under $y = \sqrt{x}$



① الاتجاه الدوران حول اي محور.
② فائدة الرسم هو تحديد حدود تكامل.
③ تطبيق القانون

$$\text{Volume} = \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 \cdot dx = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$