The Laplace transform:

* Definition and notation:

- We define laplace-transform of a function $f(t)$ by expression:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

where

$s \rightarrow$ is Complex Variable

$e^{-st} \rightarrow$ kernel of the transformation

- In Capital letter:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt}$$

$\mathcal{L} \longrightarrow$ laplace transform

$$\begin{tikzcd} f(t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & F(s) \end{tikzcd}$$

t-domain (time domain) — s-domain (frequency domain)

Transforms of simple function:

Example: 1

Let $f(t) = 1$ when $t \geqslant 0$, find $F(s)$

Solution:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} * (1)\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

when $\boxed{f(t) = C}$ $\quad \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{C}{s}$

ملاحظة

* The interval of integration above in infinite. Such an integral is called an improper integral, by difinition, is eval-ated according to the rule

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}$$

So:

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st}\, dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^{0} \right] = -$$

Ex: 2 $\boxed{\mathcal{L}\, e^{at}}$ تحويل لابلاس لدالة الـ exponential

- Let $f(t) = e^{at}$ when $t \geq 0$, where a is a constant

find $\mathcal{L}\, f(t)$

Solution:

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \frac{1}{a-s}\, e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty$$

when $(s-a) > 0$

$$\boxed{\mathcal{L}\, e^{at} = \frac{1}{s-a}}$$ مفهوم

ملاحظة

✱

اذا كان سالب $(-at)$

$$\boxed{\mathcal{L}\, e^{-at} = \frac{1}{s+a}}$$ مفهوم

Theorem ①: linearity of the laplace trans.

$$\mathcal{L}\{af(t)+b\,g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

proof

$$\mathcal{L}\{af(t)+b\,g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{af(t)+b\,g(t)\}\,dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Ex. 3: Application of Theorem ① Hyp. fun.

- Find the Laplace transforms of cosh at and sinh at

Solution: since $\boxed{\cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}}$

$\boxed{\sinh(at) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}}$

$$\therefore \mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

EXAMPLE 4 : Cosine and Sine

Derive the formulas

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos wt) = \frac{s}{s^2 + w^2}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin(wt)) = \frac{w}{s^2 + w^2}}$$

Solution: Let: $L_c = \mathcal{L}(\cos wt)$ and $L_s = \mathcal{L}(\sin wt)$

في هذه الحالة عند تحويل لابلاس سيكون حسب القانون $\mathcal{L}\cos wt = \int_0^\infty \cos wt\, e^{-st}\, dt$

نستخدم التكامل بالتجزئة $\boxed{\text{Integrating by parts}}$ كما وضحنا سابقاً

في تحويل فورير في أكثر من مثال.

$$L_c = \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} \cos wt\, dt}_{\int u\, dv} = \underbrace{\frac{e^{-st}}{-s} \cos wt \Big|_0^\infty}_{u * v} - \underbrace{\frac{w}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin wt\, dt}_{\int v * du}$$

بعد التعويض ينتج

$$= \frac{1}{s} - \frac{w}{s} L_s$$

ملاحظة مهمة! (L_s) تمثل تحويل لابلاس للـ$(\sin wt)$ وبالنظر الى الجزء الأخير من التكامل أعلاه نجد أن

$$\boxed{L_s = \int_0^\infty e^{-st} \sin wt\, dt}$$

يتبع

$$L_s = \mathcal{L}(\sin wt) = \int_0^\infty e^{-st} \sin wt \, dt$$

$$= \cancel{\frac{e^{-st}}{s} \sin wt \Big|_0^\infty} + \frac{w}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos wt \, dt = \frac{w}{s} L_c$$

بالتعويض عن L_s في صيغة L_c على اليمين من المعادلة وكذلك
L_c (لابلاس الـ($\cos wt$)) في صيغة L_s على اليمين ايضاً ينتج :

$$L_c = \frac{1}{s} - \frac{w}{s}\left(\frac{w}{s} L_c\right) = \frac{1}{s} - \frac{w^2}{s^2} L_c$$

$$L_c\left(1 + \frac{w^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\therefore L_c = \frac{s}{s^2 + w^2}}$$

$$L_s = \frac{w}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{w}{s} L_s\right)$$

$$L_s\left(1 + \frac{w^2}{s^2}\right) = \frac{w}{s^2}$$

$$\boxed{\therefore L_s = \frac{w}{s^2 + w^2}}$$

Complex method

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\therefore \mathcal{L}\, e^{j\omega t} = \frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+\omega^2} + j\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Basic transforms:

$$\mathcal{L}(t^{(n+1)}) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n+1}\, dt = \underbrace{\cancel{-\frac{1}{s} e^{-st}\, t^{n+1} \Big|_0^\infty}}_{0} + \frac{n+1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, t^{n}\, dt$$

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{n+1}{s}\,\mathcal{L}(t^n) = \frac{n+1}{s}\cdot\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}$$

يتبع الموضوع القادم : المحاضرة القادمة

S-Shifting

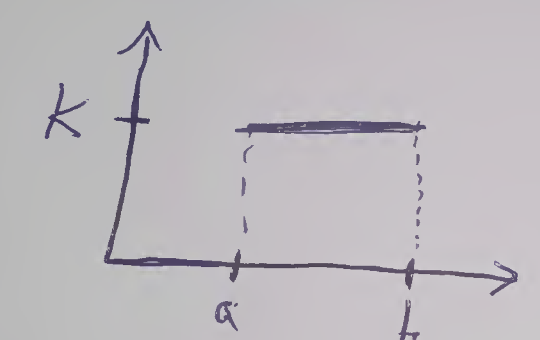
H.W: Find the Laplace transform of the following functions:

1- $(t^2-3)^2$

2- $(\sin^2 4t)$

3- $(e^{-t} \sinh 5t)$

4- $(t+1)^3$

5- 

$\left(\text{Hint: } k\int_a^b e^{-st}\,dt\right)$

باعتبار أن قيمة الـ $f(t)$ في السؤال الكامل هي (k) ثابت
فيكون تحويل لابلاس (التكامل) يحوي فقط (e^{-st}) وحدود التكامل
تؤخذ من الشكل $(a \longleftrightarrow b)$ فيكون الحل فقط تكملة المعادلة
المعطاة